EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Correction série 2

Exercice 1. On considere l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_{\geqslant -2} \mapsto x^3 - x \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut $f_*([-2, +\infty[)$? Que vaut $f_*([0, +\infty[)$?
2. Que vaut $f^{(-1)}([0, +\infty[)$? Que vaut $f^{(-1)}([-2, +\infty[)$?
3. Cette application est elle injective ?
4. Cette application est elle surjective ?
5. Comment modifier l'espace d'arrivee pour la rendre surjective ?
6. Trouver x_0 le plus petit possible pour cette application, avec l'espace de depart $\mathbb{R}_{\geqslant x_0}$ soit injective.

Solution. Tout d'abord quelques rappels d'analyse réelle :

— Si une fonction dérivable admet une dérivée positive (resp. strictement positive) sur un intervalle de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors cette fonction est croissante (resp. strictement croissante) sur cet intervalle.

— Si une fonction dérivable admet une dérivée négative (resp. strictement négative) sur un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ alors cette fonction est décroissante (resp. strictement décroissante) sur cet intervalle.

— Les extrema d'une fonction définie et dérivable sur intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les images des points du bords de cet intervalle ou des points stationnaires (de dérivée nulle).

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f définie et continue sur I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ alors pour tout $y \in]m, M[$ ou $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

— Une fonction strictement croissante est injective.

1) Démontrons que $f([-2, +\infty[) = [-6, +\infty[$. On procèdera par double inclusion. On s'appuiera sur le tableau de variation de f :

x	-2	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	0	$\frac{-1+\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{3}$	0	$+\infty$

Étant donné que -6 est inférieur à $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$ on a bien $f([-2,+\infty[) \subset [-6,+\infty[$.
D'autre part, f est continue avec :

$$-6 = \inf\{f(x) : x \in [-2,+\infty[\} \text{ et } +\infty = \sup\{f(x) : x \in [-2,+\infty[\}.$$

Donc pour tout $y \in [-6,+\infty[$, il existe $x \in [-2,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. C'est à dire $[-6,+\infty[\subset f([-2,+\infty[)$.
On conclut que $f([-2,+\infty[) = [-6,+\infty[$.

Un raisonnement similaire donne $f([0,+\infty[) = [\frac{1-\sqrt{3}}{3},+\infty[$.

2) À l'aide du tableau de variation on observe que $f^{-1}([0,+\infty[) = [-1,0] \cup [1,+\infty[$. Pour $f^{-1}([-2,+\infty[)$, le tableau de variation nous indique qu'il existe $\alpha \in]-2,-1[$ tel que $f(\alpha) = -2$. En particulier, comme la fonction est strictement croissante sur cet interval, c'est l'unique preimage de -2 sur cet intervale. Ainsi, $f^{-1}([-2,+\infty[) = [\alpha,+\infty[$.

Remarque : La polynôme $x^3 - x + 2$ n'admet pas de racine évidente, par conséquent trouver la valeur exact de α (qui n'est pas rationel) requiert des méthodes de calcul que vous n'êtes pas sensé connaitre à priori.

3) On rappelle qu'une application $g : A \to B$ est injective si et seulement si :

$$\forall x, y \in A : (x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y)).$$

Or ici -1 et 0 on la même image donc f n'est pas injective.

4) On rappelle qu'une application $g : A \to B$ est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in B \exists x \in A : g(x) = y.$$

Or ici on sait que $f([-2,+\infty[) = [-6,+\infty[$. en particulier $-7 \notin f([-2,+\infty[)$ mais $-7 \in \mathbb{R}$ donc $f : [-2,+\infty[\to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

5) Une application est évidement surjective dans son image par définition de l'image, il suffit donc de restreindre $\mathbb{R}$ à l'image de f. Ainsi, la fonction $h : [-2,+\infty[\to f([-2,+\infty[)$ définit pour tout $x \in [-2,+\infty[$ par $h(x) = f(x)$ est surjective.

6) On sait que sur $[-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty[$ l'application f est strictement croissante donc injective. Ainsi on peut déduis que $x_0 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Maintenant, on doit prouver que $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est effectivement la plus petite valeur possible. On procède par l'absurde.

Supposons que $x_0 < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ainsi f est injective sur $[x_0, +\infty[$. On peut supposer que $x_0 > 0$. Notons $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pour plus de simplicité. La fonction f admet les deux propriétés suivante :

— Sur l'intervalle $[x_0, m]$ f est strictement décroissante.
— Sur l'intervalle $[m, 1]$ f est strictement croissante.

Par le théorème des valeurs intermédiaires :

— la fonction $g : [x_0, m] \to \mathbb{R}$, définie comme la restriction de f à $[x_0, m]$ atteint toute valeurs de $[f(m), f(x_0)]$,
— la fonction $h : [m, 1] \to \mathbb{R}$, définie comme la la restriction de f à $[m, 1]$ atteint toute valeurs de $[f(m), 0]$.

Observons que si l'on pose $y = \frac{f(x_0)}{2}$ alors $y \in]f(m), 0[\cap]f(m), f(x_0)[$, on a donc l'existence de :

— un point $x_g \in]x_0, m[$ tel que $y = g(x_g) = f(x_g)$,
— un point $x_h \in]m, 1[$ tel que $y = g(x_h) = f(x_h)$.

Ainsi $f(x_g) = f(x_h) = y$ avec $x_g \neq x_h$ et $x_g, x_h \in [x_0, +\inf[$ ce qui contredit l'injectivité de f sur $[x_0, +\inf[$. Donc $x_0 = m$.

Exercice 2. Soient X, Y, Z des ensembles (pas forcement finis) et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications entre les ensembles X et Y et les ensembles Y et Z et $g \circ f : X \to Z$ l'application composee.

On verra la semaine prochaine que si f et g sont injectives (resp. surjectives,) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective) [1].

On va examiner des reciproques de ces faits.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Donner un exemple montrant que f n'est pas forcement surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Donner un exemple montrant que ψ n'est pas forcement injective.

Solution.

1. Soit $z \in Z$ un élément arbitraire. On montre qu'il existe un élément $y \in Y$ tel que $f(y) = z$.
   Comme $g \circ f$ est surjective, il existe un élément $x \in X$ tel que $g \circ f(x) = z$. Ainsi, si on prend l'élément $y := f(x)$, alors $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$.
   Comme z est arbitraire, on conclut que g est surjective.

1. En particulier si f et g sont bijective alors $g \circ f$ est bijective.

Comme contre-exemple, on peut considerer les ensembles $X = Y = \{a, b, c\}$ et $Z = \{a, b\}$ et definir les fonctions suivantes :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
a \arrow[r, mapsto] & a \arrow[r, mapsto] & a \\
b \arrow[ur, mapsto] & b \arrow[r, mapsto] & b \\
c \arrow[r, mapsto] & c \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

2. Soient $x, x' \in X$ deux éléments arbitraires. Nous avons

$$\begin{aligned}
& f(x) = f(x') \\
\Longrightarrow\ & g(f(x)) = g(f(x')) \\
\Longleftrightarrow\ & g \circ f(x) = g \circ f(x') \\
\Longleftrightarrow\ & x = x' \text{ par injectivité de } g \circ f.
\end{aligned}$$

Par conséquent f est injective.

Comme contre-exemple, on peut prendre les ensembles $X = Z = \{a, b\}$ et $Y = \{a, b, c\}$ et définir les fonctions suivantes.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
a \arrow[r, mapsto] & a \arrow[r, mapsto] & a \\
b \arrow[r, mapsto] & b \arrow[r, mapsto] & b \\
 & c \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Exercice 3. Soit $f : X \mapsto Y$ une application entre ensembles. Pour $A \subset X$ un sous-ensemble, on notera pour simplifier l'image de A par X par $f(A) \subset Y$ (au lieu de $f_*(A)$).

1. Que vaut $f(\emptyset)$?
2. Montrer que pour tout sous-ensembles $A, B \subset X$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

3. (a) Montrer que pour tout $A, B \subset X$ des sous-ensembles, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$$

   (b) Donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

   (c) Montrer que si f est injective on a

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

4. Montrer que pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$, on a

$$f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D).$$

5. Montrer que pour tout pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$, on a

$$f^{(-1)}(C \cap D) = f^{(-1)}(C) \cap f^{(-1)}(D).$$

6. Montrer que

$$f \text{ est injective } \iff \forall A \subset X,\ f^{(-1)}(f(A)) = A.$$

7. Montrer que

$$f \text{ est surjective } \iff \forall C \subset Y,\ f(f^{(-1)}(C)) = C.$$

Solution.

1. Par définition,

$$f(\emptyset) := \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset.$$

2. Nous avons la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B \text{ tel que } f(x) = y \\ &\iff \exists x \in A \text{ ou } x \in B \text{ tel que } f(x) = y \\ &\iff f(x) \in f(A) \text{ ou } f(x) \in f(B) \text{ et } f(x) = y \\ &\iff y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

3. (a) Comme $A \cap B \subset A$, $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même on a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Ainsi $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(b) Par exemple, prenons la fonction constante $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie tout élément $x \in \mathbb{R}$ vers 1. Considérons les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Alors,

$$c(A \cap B) = c(\emptyset) = \emptyset \text{ et } c(A) \cap c(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}.$$

(c) On procède par double inclusion. Par la question 3.(a), nous avons déjà l'inclusion $\subset$. Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe un $x \in A$ tel que $f(x) = y$ et il existe un $x' \in B$ tel que $f(x') = y$. Ainsi $f(x) = y = f(x')$. Mais par injectivité de f, $x = x'$. Ainsi $x = x' \in A \cap B$ et on conclut que $y = f(x) \in f(A \cap B)$.

4. *Remarque général : Attention au fait que f^{-1} ne désigne pas une application inverse (qui n'existe pas en général), c'est seulement une notation pour l'image réciproque (notée f^* dans le cours).*
Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \\ &\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D). \end{aligned}$$

5. " $\Longrightarrow$ "
Fixons $A \subset X$. Commencons à montrer la deuxième inclusion
(i.e $f^{(-1)}(f(A)) \supseteq A$). Soit $a \in A$, $f(a) \in f(A)$, donc $a \in f^{(-1)}(f(A))$.

Montrons maintenant la premiére inclusion. Soit $s \in f^{(-1)}(f(A))$ et notons $y := f(s) \in f(A)$ (Attention, le fait que $f(s) \in f(A)$ ne nous permet pas de conclure l'appartenance de s à A). Comme $y \in f(A)$, il existe un $t \in A$ tel que $f(t) = y$. Ce qui veut dire que

$$f(t) = y = f(s).$$

La fonction f est injective, alors $s = t$. Puisque l'élément t est dans A,
s appartient aussi à A.

"$\Longleftarrow$"
Fixons $x_0, x_1 \in X$ dans X tel que $f(x_0) = f(x_1)$. Nous notons $p := f(x_0)$ (resp. $p := f(x_1)$). Nous avons alors que $f(\{x_0\}) = \{p\}$ et de même pour $f(\{x_1\}) = \{p\}$. Alors :

$$\{x_0\} = f^{(-1)}(f(\{x_0\})) = f^{(-1)}(\{p\}) = f^{(-1)}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$$

Nous avons montrer que $\{x_0\} = \{x_1\}$ et ceci qui implique que x_0 et x_1 sont égaux.

Par le choix abstrait de x_0 et x_1, nous pouvons conclure que f est injective.

6. " $\Longrightarrow$ "
Soit $C \subset Y$. Montrons d'abord la première inclusion (i.e $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$). Supposons que $f^{-1}(C) \neq \varnothing$, sinon l'inclusion est trivial. Soit $t \in f(f^{-1}(C))$, $\exists t_0 \in f^{-1}(C)$ t.q $f(t_0) = t$. Comme $t_0 \in f^{-1}(C)$ implique que $f(t_0) \in C$ donc $t = f(t_0) \in C$

Attaquons maintenant à la deuxième inclusion. Soit $c \in C$. Comme f est surjective, il existe un $b \in X$ tel que $f(b) = c$.
Nous avons que $f(b) \in C$. Ceux-ci revient à dire que $b \in f^{(-1)}(C)$ et donc $f(b) \in f(f^{(-1)}(C))$. Puisque $c = f(b)$, alors c appartient à $f(f^{(-1)}(C))$.
Par le choix arbitraire de c, nous avons montré la deuxième inclusion.

"$\Longleftarrow$"
Prenons $y \in Y$. Nous savons que $f(f^{(-1)}(\{y\})) = \{y\}$. Puisque que l'ensemble $\{y\}$ est non vide, alors $f^{(-1)}(\{y\})$ ne l'est aussi (car $f(\varnothing) = \varnothing$). Ce qui veut dire que $f^{(-1)}(\{y\})$ admet au moins un élément. On conclut alors que f est surjective.

Exercice 4. ("Cantor, encore !") Construire une application bijective

$$C_3 : \mathbb{N}^3 \simeq \mathbb{N}$$

qui est "polynomiale", c'est a dire qu'il existe une fonction polynomiale en trois variables a coefficients rationels,

$$P(X,Y,Z) = \sum\sum_{i,j,k\geqslant 0} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$$

(avec $a_{i,j,k}$ des nombres rationels) telle que

$$\forall (l,m,n) \in \mathbb{N}^3,\ C_3((l,m,n)) = P(l,m,n).$$

Pour ce faire on pourra utiliser le fait que l'on connait (Feuille 1) une application polynomiale bijective

$$C_2 : \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$$

et le fait (associativite du produit cartesien, admis) que

$$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}.$$

Solution.

Remarque. Pour simplifier la notation, au lieu d'écrire "$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}$" nous l'écrivons "$\sum_{i,j\in I}$" avec $I \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini d'indices. En général, on devrait plutôt noter "$\sum_{(i,j)\in I}$" avec $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant m\}$. Mais comme nous travaillons sur des polynomes, le nombre de coefficients valant zéro est infini (denombrable). Alors pour un ensemble adequat d'indices, "$\sum_{i,j\in I}$" fait sences.

Nous definissons :

$$\begin{aligned} C_3 :\ & \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \\ & (k,n,m) \mapsto C_2(k, C_2(n,m)). \end{aligned}$$

Commençons à montrer que C_3 est bijective.

1. <u>*Injectivité :*</u> Soit $k, \hat{k}, n, \hat{n}, m, \hat{m} \in \mathbb{N}$ tel que

   $$C_3(k,n,m) = C_3(\hat{k},\hat{n},\hat{m}).$$

   Donc :

   $$\begin{aligned} C_3(k,n,m) &= C_3(\hat{k},\hat{n},\hat{m}) \\ C_2(k, C_2(n,m)) &= C_2(\hat{k}, C_2(\hat{n},\hat{m})) \end{aligned}$$

   Comme C_2 est injective, cela implique que $(k, C_2(n,m)) = (\hat{k}, C_2(\hat{n},\hat{m}))$. Ainsi $k = \hat{k}$, $C_2(n,m) = C_2(\hat{n},\hat{m})$ et denouveau par l'injectivité de C_2, nous avons $(n,m) = (\hat{n},\hat{m})$ (i.e $n = \hat{\hat{n}}$ et $m = \hat{m}$).
   C_3 est bel et bien injective.

2. <u>*Surjectivité*</u> Soit $l \in \mathbb{N}$, C_2 est surjective alors il existe $k, t \in \mathbb{N}$;

   $$C_2(k,t) = l.$$

   Denouveau par la surjectivité de C_2, nous avons alors qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que

   $$C_2(n,m) = t.$$

   Ainsi nous avons :

   $$C_3(k,n,m) = C_2(k, C_2(n,m)) = C_2(k,t) = l$$

   et ceux-ci conclut la surjectivité de C_3.

   Il nous reste encore à montrer que C_3 est polynomiale. Comme c'est le cas pour C_2, il existe $P_2(X,Y) = \sum_{i,j\in I} w_{ij} X^i Y^j$, où $w_{i,j} \in \mathbb{Q}$, $\forall i,j \in I$ t.q

   $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ C_2(m,n) = P_2(m,n).\ (\star\star)$$

où $I \subset \mathbb{N}$ est l'ensemble fini d'indices.

A l'aide de la distribution usuel, nous allons montrer par récurence que $(P_2(X,Y))^d$ est un polynomial pour n'importe quel $d \in \mathbb{N}$ (le cas $d = 0, 1$ est trivial.)

$\boxed{d = 2 :}$ Nous montrons que $P_2(X,Y)^2$ est une fonction polynomiale.

$$\begin{aligned}
(P_2(X,Y))^2 &= P_2(X,Y)P_2(X,Y) \\
&= \left(\sum_{i_1,j_1 \in I} w_{i_1 j_1} X^{i_1} Y^{j_1}\right)\left(\sum_{i_2,j_2 \in I} w_{i_2 j_2} X^{i_2} Y^{j_2}\right) \\
&= \sum_{i_1,j_1 \in I} \sum_{i_2,j_2 \in I} w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_2} X^{i_1+i_2} Y^{j_1+j_2} \\
&= \sum_{s,t \in I_2} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i_1+i_2=s \\ j_1+j_2=t}} w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_2}\right)}_{=: w_{(2),st} \in \mathbb{Q}} X^s Y^t \\
&= \sum_{s,t \in I_2} w_{(2),st} X^s Y^t
\end{aligned}$$

où $I_2 \subset N$ designe l'ensemble fini d'indices.

Remarque. Le terme "$\sum_{\substack{i_1+i_2=s \\ j_1+j_2=t}} w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_2}$" signifie simplement qu'on somme les $(w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_2})$ pour lesquel $i_1 + i_2 = s$ et $j_1 + j_2 = t$.

$\boxed{d > 2 :}$ Par notre hypothèse d'induction, nous designons $P_2^{d-1}(X,Y) = \sum_{i,j \in R} w_{(d),ij} X^i Y^j$ où I_d l'ensemble finit d'indice de P_2^{d-1}.Le raisonement est similaire que le cas $d = 2$:

$$
\begin{aligned}
(P_2(X,Y))^d &= P_2(X,Y)P_2(X,Y)^{d-1} \\
&= \left(\sum_{i_1,j_1\in I} w_{i_1j_1}X^{i_1}Y^{j_1}\right)\left(\sum_{i_2,j_2\in I_{d-1}} w_{(d-1)i_2j_2}X^{i_2}Y^{j_2}\right) \\
&= \sum_{i_1,j_1\in I}\sum_{i_2,j_2\in I_{d-1}} w_{i_1j_1}w_{(d-1),i_2j_2}X^{i_1+i_2}Y^{j_1+j_2} \\
&= \sum_{s,t\in I_d} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i_1+i_2=s\\ j_1+j_2=t}} w_{i_1j_1}w_{(d-1),i_2j_2}\right)}_{=:w_{(d),st}\in\mathbb{Q}} X^sY^t \\
&= \sum_{s,t\in I_d} w_{(d),st}X^sY^t
\end{aligned}
$$

Où $I_d \subset \mathbb{N}$ designe l'ensemble fini d'indices. Ainsi nous avons montré que $P_2(X,Y)^d$ est une fonction polynomale.

Nous savons, par le $(\star\star)$, que

$$\forall (l,m,n)\in\mathbb{N}^3,\ C_3(l,m,n) = P_2(l, P_2(m,n)).$$

En definissant $P_3(X,Y,Z) := P_2(X,P_2(Y,Z))$, il nous reste à montrer que $P_3(X,Y,Z)$ est une fonction polynomiale.

$$
\begin{aligned}
P_3(X,Y,Z) &= P_2(X,P_2(Y,Z)) \\
&= \sum_{i,j\in I} w_{ij}X^iP_2(Y,Z)^j \\
&= \sum_{i,j\in I} w_{ij}X^i \sum_{s,t\in I_j} w_{(j),st}Y^sZ^t \\
&= \sum_{i,j\in I}\sum_{s,t\in I_j} w_{ij}w_{(j),st}X^iY^sZ^t \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{s,t\in I_j} \underbrace{\left(\sum_{j\in I} w_{ij}w_{(j),st}\right)}_{=:a_{ist}\in\mathbb{Q}} X^iY^sZ^t \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{s,t\in I_j} a_{ist}X^iY^sZ^t
\end{aligned}
$$

Donc P_3 est bien une fonction polynomale est ceci clôt cet exercice.

Exercice 5. Pour x un nombre rationel on note $\lfloor x \rfloor$ la fonction "plancher" de x, ie. le plus grand entier inferieur ou equal a x.

Montrer que l'application

$$(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto m + (n + \lfloor (m+1)/2 \rfloor)^2 \in \mathbb{N}$$

et une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Solution. Nous allons montré que cette application est *injective* et *surjective.*

1. *Surjectivité :*
   Soit $y \in \mathbb{N}$. Nous definition $x := max\{t \in \mathbb{N} \mid t^2 \leqslant y\}$. Dans ce cas là, l'élément y appartient à l'intervale $[x^2, (x+1)^2[$, i.e :

   $$x^2 \leqslant y < (x+1)^2.$$

   Cherchons maintenant les candidats $n, m \in \mathbb{N}$ adéquats.

   En prenant $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 + m = y$, nous avons que cet élément ne peut être plus grand que $2x$, dû à l'inegalité au-dessus. I.e

   $$x^2 + m < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \implies m < 2x + 1 \implies m \leqslant 2x.$$

   Puisque $m \leqslant 2x$, alors $\frac{m+1}{2} \leqslant \frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$. l'élément x est un entier, donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ n'est rien d'autre que x. Ce que veut dire que

   $$\lfloor (m+1)/2 \rfloor \leqslant \lfloor x + 1/2 \rfloor = x$$

   et celà implique

   $$0 \leqslant x - \lfloor (m+1)/2 \rfloor$$

   Puisque $x - \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ est plus grand ou égal à zéro alors $n := x - \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ appartient bien à $\mathbb{N}$. Ainsi nous avons :

   $$y = m + x^2 = m + (n + \lfloor (m+1)/2 \rfloor)^2.$$

   Ce qui conclut la surjectivité.

2. *Injectivité :*
   Soit $n, \tilde{n}, m, \tilde{m}$ dans $\mathbb{N}$ tel que

   $$m + (n + \lfloor (m+1)/2 \rfloor)^2 = \tilde{m} + (\tilde{n} + \lfloor (\tilde{m}+1)/2 \rfloor)^2$$

   Denotons $x := n + \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ et $\tilde{x} := \tilde{n} + \lfloor (\tilde{m}+1)/2 \rfloor$.

Sans perdre de généralité, $m \geqslant \tilde{m}$.

$$\begin{aligned} m + (n + \lfloor (m+1)/2 \rfloor)^2 &= \tilde{m} + (\tilde{n} + \lfloor (\tilde{m}+1)/2 \rfloor)^2 \\ m + x^2 &= \tilde{m} + \tilde{x}^2 \\ m - \tilde{m} + x^2 &= \tilde{x}^2 \quad (\star) \end{aligned}$$

Puisque $m \leqslant 2\lfloor (m+1)/2 \rfloor$ (si m est impair, $\lfloor (m+1)/2 \rfloor = (m+1)/2$ et si m est pair, $\lfloor (m+1)/2 \rfloor = (m+1)/2 - 1/2)$, nous avons que $m \leqslant 2x$. Ce qui implique que $0 \leqslant m - \tilde{m} \leqslant m \leqslant 2x$ et donc

$$x^2 \leqslant x + m - \tilde{m} = \tilde{x} \leqslant x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

et cela peut être résumé ainsi :

$$x^2 \leqslant \tilde{x}^2 < (x+1)^2.$$

Comme $x, \tilde{x} \in \mathbb{N}$ et que $\tilde{x}^2 \in [x^2, (x+1)^2[$, la valeur de $\tilde{x}^2$ n'a pas le choix d'être égal à celui de x^2.

Ainsi $x^2 = \tilde{x}^2$ implique (dû à $(\star)$) que $m = \tilde{m}$. Comme $x, \tilde{x} \in \mathbb{N}$, nous avons que $x = \tilde{x}$ et donc $n = \tilde{n}$.

Ce qui conclut l'injectivité